Материалы для проведения регионального этапа

XLIV ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2017–2018 учебный год

Первый день

31 января–1 февраля 2018 г.

Москва, 2017

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLIV Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, Л. А. Емельянов, П. А. Кожевников, С. О. Кудря, А. С. Кузнецов, Ю. В. Кузьменко, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, О. К. Подлипский, А. А. Полянский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, А. Д. Труфанов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д. ф.-м. н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2017–2018 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2017–2018 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **31 января 2018 г.** (I тур) и **1 февраля 2018 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2017–2018 учебном году»** для часовых поясов.

Показ работ, проведение апелляций и разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

В остальных субъектах Российской Федерации рекомендуется также осуществлять показ работ и проведение апелляций не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2017–2018 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратиков каждого размера было одно и то же количество.

(*Методкомиссия*)

Решение. Один из многих возможных примеров приведён на рис. 1.

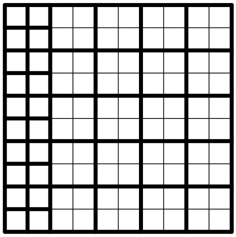


Рис. 1

Комментарий. Любой верный пример разрезания — 7 баллов.

9.2. На доске написаны пять натуральных чисел. Оказалось, что сумма любых трёх из них делится на каждое из остальных. Обязательно ли среди этих чисел найдутся четыре равных?

(*С. Берлов, Д. Храмцов*)

Ответ. Да, обязательно.

Решение. Пусть a, b, c, d и e — числа на доске в неубывающем порядке, то есть $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$. Тогда по условию $a+b+c$ и $b+c+d$ делятся на e. Следовательно, $d-a = (b+c+d)-(a+b+c)$ также делится на e. Поскольку $0 \leqslant d-a < d \leqslant e$, это возможно лишь при $d-a = 0$. Значит, $a = b = c = d$ (так как $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$).

Замечание. Можно показать, что условию задачи удовлетворяют только пятёрки чисел вида (a, a, a, a, a) и $(a, a, a, a, 3a)$ (возможно, с переставленными числами).

Комментарий. Верный ответ без обоснования (или с неверным обоснованием) — 0 баллов.

Доказано только, что среди чисел найдутся два равных — 2 балла.

Доказано только, что разность любых двух чисел с доски делится на любое из оставшихся — 3 балла.

9.3. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка BC. Найдите угол DME.

(*А. Кузнецов*)

Ответ. 90°.

Первое решение. Обозначим через N середину отрезка AD. Поскольку треугольник AED равнобедренный, его медиана EN является высотой, то есть $EN \perp AD$. Значит, $NE \perp BC$ (см. рис. 2).

Поскольку $AD \parallel BC$ и $BM = MC = AN = ND = AD/2$, четырёхугольники $ABMN$ и $BMDN$ — параллелограммы, откуда $AB \parallel MN$ и $BN \parallel DM$. Так как $\angle ABE = 90^\circ$ и $AB \parallel MN$, получаем $BE \perp MN$. Таким образом, E — точка пересечения высот треугольника BMN, откуда $ME \perp BN$. Наконец, из $BN \parallel DM$, получаем $ME \perp DM$, то есть $\angle DME = 90^\circ$.

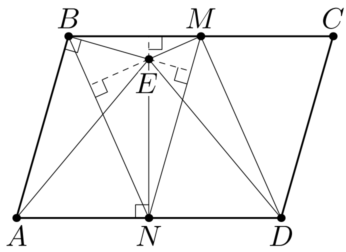


Рис. 2

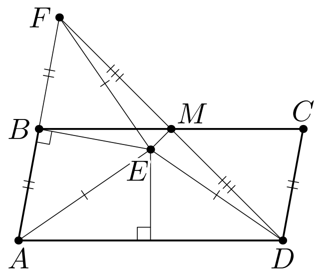


Рис. 3

Второе решение. На продолжении отрезка AB за точку B отметим точку F так, что $AB = BF$ (см. рис. 3). Тогда $BF = CD$ и $BF \parallel CD$, поэтому четырёхугольник $BDCF$ — параллелограмм. Точка M — середина диагонали BC этого параллелограмма, значит, M — середина его диагонали DF.

Прямая BE — серединный перпендикуляр к отрезку AF, откуда $AE = FE$. Из условия теперь получаем, что $DE = AE = FE$. Значит, точка E лежит и на серединном перпендикуляре к DF. Отсюда $\angle EMD = 90^\circ$.

9.4. Кондитерская фабрика выпускает N сортов конфет. На Новый год фабрика подарила каждому из 1000 учеников школы подарок, содержащий по конфете нескольких сортов (составы подарков могли быть разными). Каждый ученик заметил, что для любых 11 сортов конфет он получил конфету хотя бы одного из этих сортов. Однако оказалось, что для любых двух сортов найдётся ученик, получивший конфету ровно одного из этих двух сортов. Найдите наибольшее возможное значение N.

(*Д. Храмцов*)

Ответ. $N = 5501$.

Решение. Обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_N$ множества учеников, **не получивших** конфет соответственно 1-го, 2-го, $\ldots$, N-го сортов. Согласно условию, все эти множества различны; кроме того, каждый ученик содержится не более, чем в десяти из них. Отсюда следует, что суммарное количество элементов в наших множествах не превосходит $1000 \cdot 10 = 10000$.

Пусть среди наших множеств ровно k одноэлементных. Тогда количество множеств из более, чем одного ученика, не превосходит $\frac{10000-k}{2}$, поэтому общее число всех непустых множеств не превосходит $\frac{10000-k}{2} + k = \frac{10000+k}{2} \leqslant \frac{11000}{2} = 5500$. С учётом того, что одно из множеств может быть пустым, получаем, что $N \leqslant 5501$.

Осталось показать, как описанная ситуация могла возникнуть при $N = 5501$. Сделаем множество A_{5501} пустым; различные множества $A_{4501}, \ldots, A_{5500}$ будут содержать по одному ученику. Осталось выбрать различные двухэлементные множества $A_1, \ldots, A_{4500}$ так, чтобы каждый из учеников был ровно в 9 из них. Для этого, например, можно разбить учеников на 100 групп по 10 человек и взять все пары детей, находящихся в одной группе (их получится как раз $100 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 4500$).

Замечание. Достраивать пример можно по-разному. Можно, в частности, выстроить детей по кругу и каждое двухэлементное множество составлять либо из пары противоположных учеников (таких пар 500), либо из пары учеников, между которыми стоят не больше трёх других детей.

Комментарий. Только верный ответ без обоснования (или с неверным обоснованием) — 0 баллов.

Только доказательство того, что $N \leqslant 5501$ — 4 баллов.

Только пример с $N = 5501$ сортами — 3 балла.

Если участник не учёл того, что один сорт может присутствовать во всех подарках (т.е. соответствующее множество A_i может быть пустым) и из-за этого получил ответ 5500 — снимается 1 балл.

9.5. Числа x, y и z удовлетворяют условию $x^2+y^2+z^2=1$. Докажите, что

$$(x-y)(y-z)(x-z) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

(*Л. Емельянов, методкомиссия*)

Первое решение. Поскольку при любой перестановке переменных левая часть неравенства либо не меняется, либо меняет знак, достаточно проверить неравенство для любой перестановки чисел x, y и z, для которой левая часть неотрицательна. Поэтому можно считать, что $x \geqslant y \geqslant z$.

По неравенству о средних для двух чисел имеем

$$(x-y)(y-z) \leqslant \left(\frac{(x-y)+(y-z)}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-z}{2}\right)^2.$$

Следовательно,

$$(x-y)(y-z)(x-z) \leqslant \frac{(x-z)^3}{4}\,,$$

и нам достаточно доказать, что $x-z \leqslant \sqrt{2}$ или, что тоже самое, $(x-z)^2 \leqslant 2$. Последнее уже просто; действительно,

$$(x-z)^2 = 2x^2+2z^2-(x+z)^2 \leqslant 2x^2+2z^2 = 2-2y^2 \leqslant 2.$$

Второе решение. Как и в первом решении, мы считаем, что $x \geqslant y \geqslant z$. Обозначим $a = x-y \geqslant 0$, $b = y-z \geqslant 0$; тогда $y = x-a$, $z = y-b$. Равенство из условия задачи преобразуется к виду

$$\begin{aligned} 0 &= x^2+(x-a)^2+(x-a-b)^2-1 = \\ &= 3x^2-2(2a+b)x+(2a^2+2ab+b^2-1), \end{aligned} \tag{1}$$

а требуемое неравенство — к виду

$$ab(a+b) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,. \tag{2}$$

Рассмотрим правую часть равенства (1) как квадратный трёхчлен от x. Поскольку он имеет корень, его дискриминант неотрицателен, то есть

$$0 \leqslant (2a+b)^2-3(2a^2+2ab+b^2-1) = 3-2(a^2+ab+b^2),$$

откуда

$$a^2+ab+b^2 \leqslant \frac{3}{2}\,. \tag{3}$$

Осталось показать, как из (3) следует (2) (при $a, b \geqslant 0$).

По неравенству о средних для двух чисел имеем $a^2 + b^2 + ab \geqslant 2ab + ab = 3ab$, откуда $ab \leqslant \frac{1}{2}$. Значит,

$$(a+b)^2 = (a^2 + ab + b^2) + ab \leqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2,$$

то есть $a + b \leqslant \sqrt{2}$. Итак,

$$ab(a+b) \leqslant \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

что и требовалось.

Замечание. Число $\frac{1}{\sqrt{2}}$ в условии задачи нельзя заменить на меньшее, как показывает пример $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$, $z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Комментарий. Показано, что утверждение задачи достаточно доказать при $x \geqslant y \geqslant z$ (или при любом другом фиксированном упорядочении переменных) — 0 баллов.

10 класс

10.1. Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратиков каждого размера было одно и то же количество.

(*Методкомиссия*)

Решение. Один из многих возможных примеров приведён на рис. 4.

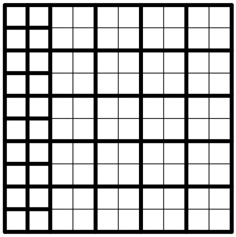


Рис. 4

Комментарий. Любой верный пример разрезания — 7 баллов.

10.2. Петя и Вася по очереди выписывают на доску натуральные числа, не превосходящие 2018 (выписывать уже имеющееся число запрещено); начинает Петя. Если после хода игрока на доске оказываются три числа, образующих арифметическую прогрессию, — этот игрок выигрывает. У кого из игроков есть стратегия, позволяющая ему гарантированно выиграть? (*М. Дидин, П. Кожевников*)

Ответ. У Васи.

Решение. Рассмотрим момент после третьего хода (когда выписаны три числа). Если к этому моменту никто еще не выиграл, то следующим ходом Вася выигрывает — ему достаточно найти два выписанных числа одной чётности и выписать своим ходом их среднее арифметическое (оно является целым числом).

Кроме того, заметим, что если три целых числа из множества $1, 2, 3, \ldots, 2018$ образуют арифметическую прогрессию, то её разность не больше 1008 (иначе разность между наибольшим и наименьшим числами будет не менее $2 \cdot 1009 = 2018$, что невозможно).

Теперь опишем выигрышную стратегию Васи.

Пусть первым ходом Петя выписал число a. Предположим, что $a \leqslant 1009$. Тогда Вася выписывает то из чисел 2017 или 2018, чётность которого отлична от чётности числа a (обозначим это число через b). После этого хода выписано два числа разной чётности; значит, они не могут быть первым и третьим членом прогрессии из целых чисел. А поскольку $b-a \geqslant 1009$, они также не могут быть соседними членами прогрессии. Тем самым, Петя не сможет выиграть третьим ходом. Но в этом случае, как мы видели ранее, следующим ходом Вася выиграет.

Если же $a \geqslant 1010$, то Вася отвечает, выписывая то из чисел 1 и 2, которое по чётности отличается от a. Дальнейшие рассуждения аналогичны первому случаю.

Комментарий. Верный ответ без обоснований (или с неверным обоснованием) — 0 баллов.

Предъявление стратегии, которая не работает хотя бы в одном случае — 0 баллов.

Предъявлена верная стратегия для Васи без обоснования, что она работает — 5 баллов.

Доказано только, что в момент, когда на доске выписаны три числа, следующим ходом всегда можно выиграть — 2 балла.

10.3. Положительные числа x, y таковы, что $x^5 - y^3 \geqslant 2x$. Докажите, что $x^3 \geqslant 2y$. (*Н. Агаханов*)

Решение. Требуемое неравенство равносильно неравенству $x^9 \geqslant 8y^3$. По условию, $8(x^5 - 2x) \geqslant 8y^3$; значит, достаточно доказать неравенство $x^9 \geqslant 8x^5 - 16x$. Перенося в последнем неравенстве все члены в левую часть, получаем неравенство $x(x^4 - 4)^2 \geqslant 0$, которое верно для положительного x. Значит, и требуемое неравенство также верно.

Комментарий. Задача сведена к доказательству неравенства $x^9 \geqslant 8x^5 - 16x$ (или эквивалентного) для положительного x — 3 балла.

10.4. Пусть O — центр окружности Ω, описанной около остроугольного треугольника ABC. На дуге AC этой окружности, не содержащей точку B, взята точка P. На отрезке BC выбрана точка X так, что $PX \perp AC$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BXP, лежит на окружности, описанной около треугольника ABO. (*И. Фролов*)

Решение. Пусть G — центр окружности γ, описанной около треугольника BXP (см. рис. 5). Тогда $\angle BGP = \overset{\smile}{BXP} = 2\angle CXP$ (так как угол CXP острый). Поскольку $GB = GP$ и $OB = OP$, треугольники GOB и GOP равны по трём сторонам, откуда $\angle BGO = \angle OGP = \frac{1}{2}\angle BGP = \angle CXP$. Наконец, из равнобедренного треугольника AOB получаем $\angle BAO = 90^\circ -$

$-\frac{1}{2}\angle AOB = 90^\circ - \angle ACB = \angle CXP$. Итак, $\angle BGO = \angle CXP = \angle BAO$, что и означает, что точки A, G, B и O лежат на одной окружности.

Замечание. Завершить решение можно по-другому, доказав, что точка G лежит на прямой AP (поскольку $\angle BPG = \angle BCA = \angle BPA$), и воспользовавшись равенством $\angle OGP = \angle CXP = \angle ABO$.

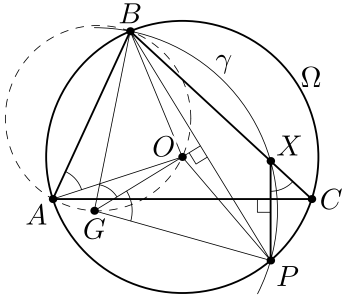


Рис. 5

Комментарий. Доказано, что $\angle BGP$ не зависит от положения точки P — 1 балл.

Доказано, что при всевозможных положениях точки P все полученные точки G лежат на *некоторой* фиксированной окружности — 3 балла.

10.5. Дано нечётное число $n > 10$. Найдите количество способов расставить по кругу в некотором порядке натуральные числа $1, 2, 3, \ldots, n$ так, чтобы каждое число являлось делителем суммы двух соседних с ним чисел. (Способы, отличающиеся поворотом или отражением, считаются одинаковыми.) (*Д. Храмцов*)

Ответ. Два способа.

Решение. Рассмотрим произвольную расстановку чисел от 1 до n, удовлетворяющую требованиям. Предположим, что два чётных числа x и y стоят рядом, а следующее за ними число — z. Так как $x + z$ делится на y, число z также чётно. Продолжая таким же образом движение по кругу, получим, что все числа в расстановке чётны, что невозможно. Итак, никакие два чётных числа не стоят рядом; значит, некоторые два нечётных числа стоят рядом, а остальные чётные и нечётные чередуются.

Заметим, что оба соседа числа n не могут быть чётными; действительно, в противном случае их сумма делилась бы на $2n$, то есть была бы не меньше $2n$. Значит, у любого нечётного числа, меньшего n, либо оба соседа чётны, либо одним из соседей является число n.

Предположим, что числа n и $n-2$ — соседи, а другой сосед числа $n-2$ — число t. Число $t+n=(n-2)+(t+2)$ должно делиться на $n-2$, что возможно лишь при $t=n-4$. Но тогда три нечётных числа n, $n-2$, $n-4$ стоят подряд, что, как мы доказали, невозможно.

Итак, оба соседа нечётного числа $n-2$ чётны, а потому их сумма делится на $2(n-2)$, то есть эта сумма не меньше $2(n-2)$; это возможно лишь если эти соседи — $n-1$ и $n-3$. В частности, числа $n-1$ и $n-2$ — соседи. Если пара $n-1$, $n-2$ продолжается далее числами, идущими подряд по убыванию вплоть до числа 1, мы приходим к круговой расстановке $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, $\ldots$, 3, 2, 1, n, которая, очевидно, удовлетворяет условию.

Предположим теперь, что пара $n-1$, $n-2$ продолжается далее числами, идущими подряд по убыванию, вплоть до числа $d>1$, а после него следует число $x\neq d-1$. Итак, у нас имеется подряд идущие по окружности числа $n-1$, $n-2$, $\ldots$, $d+1$, d, x, y, $\ldots$. Так как $x+(d+1)=(x+1)+d$ делится на d, то $x+1$ делится на d, в частности, $x\geqslant d-1$. Но x отлично от чисел $d-1, d, \ldots, n-2, n-1$; значит, единственный оставшийся вариант — это $x=n$.

Пусть $n=2k+1$. Мы получили, что число $n+1=2k+2$ делится на d; так как $d<n$, имеем $d\leqslant k+1$. С другой стороны, $y\leqslant d-1\leqslant k$ (так как все числа, большие $d-1$, уже использованы). Отсюда $d+y\leqslant(k+1)+k=n$. Так как $d+y$ должно делиться на $x=n$, приходим к единственной возможности: $d=k+1$, $x=n$, $y=k$. Итак, у нас имеются подряд идущие по окружности числа $2k, 2k-1, 2k-2, \ldots, k+2, k+1, 2k+1, k, a, \ldots$.

Так как $a\leqslant k-1$ (все числа, большие $k-1$, уже использованы) и число $(2k+1)+a=2k+(a+1)$ делится на k, однозначно находим $a=k-1$. Аналогично, если последовательность продолжается далее числами $k-1$, $k-2$, $\ldots$, $b+1$, b, идущими подряд по убыванию, а далее следует число y, однозначно находим $y=b-1$ (поскольку $b+1+y$ делится на b, и $y\leqslant b-1$). Итак, мы приходим к круговой расстановке $2k$, $2k-1$, $2k-2$, $\ldots$, $k+2$, $k+1$, $2k+1$, k, $k-1$, $k-2$, $\ldots$, 1, которая, очевидно, удовлетворяет условию (и отлична от найденной ранее).

Замечание. Тем же методом, который использовался в решении, можно доказать, что в аналогичной задаче для чётного

$n > 10$ расстановка n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, $\ldots$, 3, 2, 1 — единственная, удовлетворяющая условию.

Комментарий. Только верный ответ или верный ответ с предъявлением одной из двух искомых расстановок — 0 баллов.

Баллы за следующие продвижения из разных пунктов а), б), в) суммируются.

а) Найдены два примера расстановок, удовлетворяющих условию — 1 балл.

б) Доказано, что числа $n-1$ и $n-2$ стоят рядом — 2 балла.

Если доказано только, что два чётных числа не стоят рядом — ставится 1 балл из этих 2.

в) В предположении, что $n-1$ и $n-2$ стоят рядом, доказано, что цепочка однозначно продолжается до одного из примеров $(n-1, n-2, n-3, \ldots, 2, 1, n)$ или $(2k, 2k-1, 2k-2, \ldots, k+1, 2k+1, k, k-1, k-2, \ldots, 1)$ — 4 балла.

Если доказано только, что продолжение имеет вид $(n-1, n-2, \ldots, d+1, d, n, \ldots)$ при некотором d — ставится 1 балл из этих 4.

Если доказано, что продолжение имеет вид $(n-1, n-2, n-3, \ldots, 2, 1, n)$ или $(2k, 2k-1, 2k-2, \ldots, k+1, 2k+1, k, \ldots)$ — ставятся 3 балла из этих 4.

11 класс

11.1. Внутри выпуклого пятиугольника отметили точку и соединили её со всеми вершинами. Какое наибольшее число из десяти проведенных отрезков (пяти сторон и пяти отрезков, соединяющих отмеченную точку с вершинами пятиугольника) может иметь длину 1? (*А. Кузнецов*)

Ответ. 9 отрезков.

Решение. Сначала докажем, что все 10 отрезков не могут иметь длину 1. Предположим противное. Пусть $ABCDE$ — пятиугольник, O — точка внутри него, и все 10 проведенных отрезков имеют длину 1 (см. рис. 6). Тогда треугольники OAB, OBC, OCD, ODE и OEA — правильные, поэтому $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle AOE = 60^\circ$. Сумма же этих углов должна быть равна 360°, однако $5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$ — противоречие.

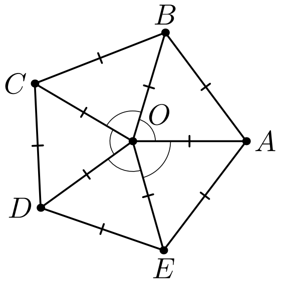


Рис. 6

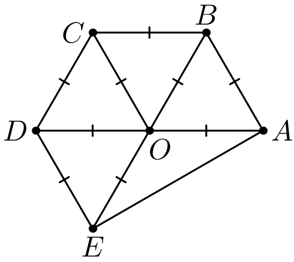


Рис. 7

Осталось привести пример, когда 9 отрезков имеют длину 1 (см. рис. 7). Отметим на плоскости точки A и O на расстоянии 1. выберем последовательно точки B, C, D и E так, чтобы треугольники AOB, BOC, COD и DOE были равносторонними. Тогда точка O лежит внутри пятиугольника $ABCDE$, и из 10 проведенных отрезков все, кроме AE, имеют длину 1.

Замечание. В приведённом примере точки A, B, C, D и E являются пятью вершинами правильного шестиугольника со стороной 1.

Комментарий. Доказано только, что отрезков единичной длины не более 9 — 3 балла.

Только пример, показывающий, что могут найтись 9 отрезков единичной длины — 3 балла.

11.2. В каждую клетку таблицы 1001×1001 поставили 0 или 1. Оказалось, что в любом столбце нулей больше, чем единиц. Обязательно ли найдутся два столбца таких, что число строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только нули, больше числа строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только единицы? (*И. Богданов*)

Ответ. Да, обязательно.

Решение. Покажем, что требуемому условию удовлетворяют *любые* два столбца таблицы. Выкинем из таблицы все столбцы, кроме двух рассматриваемых. Общее число нулей в этих столбцах больше общего числа единиц; это значит, что нулей в них не меньше 1002. Если в полученной таблице k строк с двумя нулями, то есть ещё хотя бы $1002 - 2k$ строк с одним нулём — и, следовательно, не более $1001 - k - (1002 - 2k) = k - 1$ столбцов с двумя единицами. Осталось заметить, что $k - 1 < k$.

11.3. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle B = 135°$. Пусть M — середина отрезка AC. Точка O — центр окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Луч BM вторично пересекает окружность Ω в точке D. Докажите, что центр окружности Γ, описанной около треугольника BOD, лежит на прямой AC. (*А. Кузнецов*)

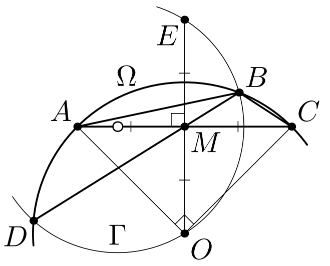


Рис. 8

Решение. Так как $\angle ABC = 135°$, то $\angle AOC = 90°$. Так как OM — медиана в прямоугольном треугольнике AOC, имеем $OM = AM = MC$. На продолжении отрезка OM за точку M отметим точку E так, что $OM = ME$ (см. рис. 8). Поскольку четырёхугольник $ABCD$ вписанный, $BM \cdot MD = AM \cdot MC = OM \cdot ME$. Следовательно, точка E лежит на окружности Γ. Точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC, поэтому $AC \perp OM$. Значит, прямая AC является серединным перпендикуляром к отрезку OE. Поскольку отрезок OE является хордой окружности Γ, её центр лежит на прямой AC.

11.4. Изначально на доску выписали числа $1 - \sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$. Каждую минуту с доски стираются все три написанных на ней числа x, y и z, а вместо них на доску записываются числа x^2+xy+y^2, y^2+yz+z^2 и z^2+xz+x^2. Могут ли в некоторый момент все три числа на доске оказаться рациональными? (*С. Кудря*)

Ответ. Нет, не могут.

Решение. Рассмотрим попарные разности выписанных чисел. За одну операцию набор разностей $x-y$, $y-z$, $z-x$ переходит в набор $(y-x)(x+y+z), (z-y)(x+y+z), (x-z)(x+y+z)$. Так как в исходный момент эти разности равнялись $1-2\sqrt{2}$, -1 и $2\sqrt{2}$, в любой момент времени попарные разности будут иметь вид $A(1-2\sqrt{2})$, $-A$ и $2A\sqrt{2}$ при некотором A. Эти три разности могут быть одновременно рациональными лишь при $A=0$. Осталось показать, что этого не произойдёт.

Предположим, что после n-ой минуты число A впервые обнулилось. Из наших формул вытекает, что после $(n-1)$-ой минуты впервые обнулилась сумма выписанных чисел. Но изначально сумма выписанных чисел ненулевая, а после первой же минуты все они становятся неотрицательными, поскольку $a^2+ab+b^2=(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3}{4}b^2 \geqslant 0$, причем равенство достигается лишь при $a=b=0$. Значит, после $(n-1)$-ой минуты все числа на доске оказались нулевыми. Но это противоречит тому, что после n-ой минуты A обнулилось впервые: ведь в этом случае после $(n-1)$-ой минуты все попарные разности чисел уже должны быть нулевыми.

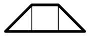
Замечание. Приведём схему другого подхода к задаче. Ясно, что в каждый момент времени любое число на доске имеет вид $a+b\sqrt{2}$ для некоторых целых a и b. При этом чётности этих чисел после n-ой минуты зависят лишь от чётностей соответствующих чисел на предыдущей минуте. Заменяя теперь в каждом числе вида $a+b\sqrt{2}$ числа a и b на их остатки от деления на 2, получаем, что исходные числа имели вид $1+\sqrt{2}$, $0+\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$, после первой минуты полученные числа имеют вид $1+\sqrt{2}$, $1+0\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$, а на каждой следующей минуте из тройки чисел $1+\sqrt{2}$, $1+0\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$ получается такая же. Значит, на доске всегда найдётся число вида $a+b\sqrt{2}$ с нечётным (а значит, ненулевым) b.

Комментарий. Доказано лишь, что после первой минуты все числа на доске будут положительными — 1 балл.

Задача сведена к доказательству того, что сумма чисел на доске не может оказаться нулевой — 3 балла.

Замечено лишь, что все числа на доске имеют вид $a + b\sqrt{2}$ с целыми a и b — 0 баллов.

Дополнительно показано, что чётности коэффициентов a и b после n-й минуты зависят лишь от чётностей коэффициентов на предыдущей минуте — 2 балла.

11.5. Назовём *лодочкой* трапецию  с основаниями 1 и 3, получающуюся приклеиванием к противоположным сторонам единичного квадратика двух треугольничков (полуклеток). В квадрате 100×100 расположена невидимая лодочка (её можно поворачивать, она не выходит за границы квадрата, её средняя клетка целиком лежит на одной из клеток квадрата). Одним выстрелом можно накрыть любую треугольную половинку клетки. Если выстрел пересекается с внутренностью лодочки (т. е. пересечение треугольника выстрела с лодочкой имеет ненулевую площадь), то она считается потопленной. Какого наименьшего количества выстрелов достаточно, чтобы наверняка потопить лодочку? (*С. Берлов, Н. Власова*)

Ответ. 4000 выстрелов.

Первое решение. Будем называть лодочку *горизонтальной* или *вертикальной* в зависимости от того, горизонтальны или вертикальны её параллельные стороны.

Покажем сначала, что 4000 выстрелов хватит. Разобьём квадрат 100×100 на 400 квадратов размером 5×5, и в каждом квадрате произведем 10 выстрелов, как показано на рис. 9. Нетрудно видеть, что в каждой строке и в каждом столбце между соседними выстрелами нельзя вставить лодочку; значит, один из выстрелов обязательно потопит лодочку.

Осталось показать, что нельзя гарантированно потопить лодочку менее, чем за 4000 выстрелов. На сей раз разобьём доску на 2000 горизонтальных прямоугольников 1×5 и покажем, что в каждый такой прямоугольник надо сделать хотя бы два выстрела. Действительно, в левые три клетки прямоугольника нужно сделать хотя бы один выстрел, иначе в них могла распо-

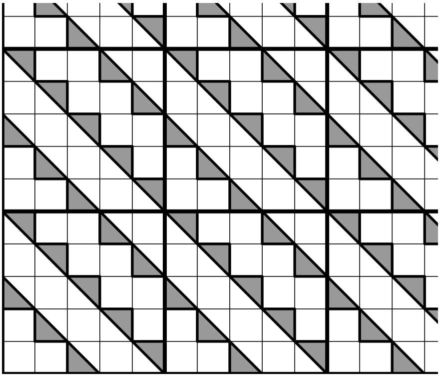


Рис. 9

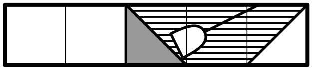


Рис. 10

ложиться непотопленная лодочка; то же верно для его правых трёх клеток. Значит, в этот прямоугольник могло быть сделано не более одного выстрела, только если единственный выстрел попал в центральную клетку прямоугольника. Без ограничения общности, этот выстрел был произведён в левый нижний треугольничек этой клетки; но тогда лодочка, расположенная как на рис. 10, не будет потоплена.

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что потребуется хотя бы 4000 выстрелов. Разобьём квадрат на 100 горизонтальных полосок 1×100 и покажем, что даже для гарантированного затопления горизонтальной лодочки уже требуется не менее 40 выстрелов в каждую из полосок.

Посчитаем количество различных способов расположить горизонтальную лодочку в полоске. Центральная клетка такой лодочки может располагаться в любой клетке полоски, кроме крайних. Для каждой из этих 98 клеток возможны два варианта расположения горизонтальной лодочки именно с этой центральной клеткой. Итого, искомое количество способов равняется $98 \times 2 = 196$.

С другой стороны, выстрел в какой-либо из треугольников в полоске может потопить максимум пять из этих возможных лодочек. Действительно, если этот треугольник, скажем, левый верхний в своей клетке c, то он потопит любую из двух лодочек с центральной клеткой c, любую из двух, центральная клетка которых непосредственно слева от c, и одну из двух, центральная клетка которых непосредственно справа от c. (Заметим, что некоторые из этих лодочек могут выходить за края доски.)

Итак, если в полоску сделано менее 40 выстрелов, они могут потопить максимум $39 \cdot 5 = 195$ вариантов расположения лодочки, то есть найдётся вариант, который не будет потоплен. Поэтому в каждую полоску надо сделать не менее 40 выстрелов, итого не менее $40 \cdot 100 = 4000$ выстрелов.

Замечание. Подобный же аргумент можно применить и к любому прямоугольнику 1×5: в нём есть 6 способов расположения лодочки, а значит, в него надо сделать хотя бы два выстрела.

Комментарий. Приведён пример, показывающий, что за 4000 выстрелов можно гарантированно потопить лодочку — 2 балла.

Доказано только, что нельзя гарантированно потопить лодочку менее, чем за 4000 выстрелов — 5 баллов.