Материалы для проведения регионального этапа

XLIV ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2017–2018 учебный год

Второй день

31 января–1 февраля 2018 г.

Москва, 2017

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLIV Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, Л. А. Емельянов, П. А. Кожевников, С. О. Кудря, А. С. Кузнецов, Ю. В. Кузьменко, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, О. К. Подлипский, А. А. Полянский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, А. Д. Труфанов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д. ф.-м. н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2017–2018 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2017–2018 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **31 января 2018 г.** (I тур) и **1 февраля 2018 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2017–2018 учебном году»** для часовых поясов.

Показ работ, проведение апелляций и разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

В остальных субъектах Российской Федерации рекомендуется также осуществлять показ работ и проведение апелляций не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2017–2018 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.6. На бесконечной ленте бумаги выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 2018. Какое число написано на 225-м месте? (*Методкомиссия*)

Ответ. $3\underbrace{999\ldots99}_{223\text{ девятки}}8$.

Решение. Поскольку $2018 = 224 \cdot 9 + 2$, наименьшее число с суммой цифр 2018 будет равняться $2\underbrace{999\ldots99}_{224\text{ девятки}}$. В этом числе 225 знаков. Рассмотрим 225-значные числа, у которых старшая цифра будет тройкой, а остальные цифры — девятки, за исключением ровно одной восьмерки. Таких чисел в точности 224 (именно столько положений для восьмерки) и у каждого из них сумма цифр 2018. Самым большим среди этих чисел будет число $N = 3\underbrace{999\ldots99}_{223\text{ девятки}}8$. Поскольку все остальные 225-значные числа с суммой цифр 2018 будут иметь старшую цифру не меньшую четырех, они будут больше указанных чисел и, значит, N будет 225-ым по счёту числом с суммой цифр 2018.

Комментарий. Только верный ответ без обоснования — 3 балла.

Если участник обсчитался и получил неверный ответ при верном ходе рассуждений — не более 5 баллов.

В работе верно найдено самое маленькое число с суммой цифр 2018, дальнейших продвижений нет — 1 балл.

9.7. Изначально по кругу расставлены 40 синих, 30 красных и 20 зелёных фишек, причём фишки каждого цвета идут подряд. За ход можно поменять местами стоящие рядом синюю и красную фишки, или стоящие рядом синюю и зелёную фишки. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы любые две стоящие рядом фишки были разных цветов? (*С. Берлов*)

Ответ. Нет.

Решение. Поскольку красные фишки не могут меняться местами с зелёными, их взаимный порядок всегда будет оставаться таким же, как исходный. Иначе говоря, если в любой момент убрать синие фишки, то останутся 30 красных фишек, стоящих подряд, и 20 зелёных, также стоящих подряд. Если требуемого удалось добиться, это означает, что мы удалили хотя бы по одной синей фишке с каждого из 29 интервалов между соседним красными фишками и с каждого из 19 интервалов между соседними зелёными фишками; но тогда синих фишек было бы не меньше, чем $29 + 19 = 48 > 40$, что не так. Значит, требуемое невозможно.

Комментарий. Замечено только, что взаимный порядок красных и зелёных фишек сохраняется — 3 балла.

9.8. Серёжа выбрал два различных простых числа p и q. Он считает натуральное число n *хорошим*, если число $p + q$ можно представить в виде суммы ровно q чисел, каждое из которых имеет вид n^k при целом неотрицательном k. (Например, если бы Серёжа выбрал $p = 7$ и $q = 3$, то он бы счёл число $n = 2$ хорошим, поскольку $7 + 3 = 2^3 + 2^0 + 2^0$). Докажите, что Серёжа считает хорошими не более двух чисел. (*С. Волчёнков*)

Решение. Пусть n является хорошим числом. Тогда $n > 1$, и для некоторых целых неотрицательных чисел k_1, k_2, ..., k_q справедливо равенство

$$p + q = n^{k_1} + n^{k_2} + \ldots + n^{k_q}.$$

Рассмотрим остаток от деления правой части на $n-1$. Поскольку любая степень числа n дает остаток 1 при делении на $n - 1$, правая часть сравнима с q по модулю $n - 1$. Тогда с q сравнима и левая часть; следовательно, p делится на натуральное число $n - 1$. Но у простого числа p только два натуральных делителя: 1 и p. Значит, $n - 1$ может равняться 1 и p. Стало быть, $n = 2$ или $n = p + 1$, и поэтому хороших чисел не больше двух.

Замечание. Число $n = p + 1$ всегда является хорошим, поскольку $p + q = n^1 + \underbrace{n^0 + n^0 + \ldots + n^0}_{q-1 \text{ слагаемое}}$. А число $n = 2$ может оказаться хорошим, а может и не оказаться. Например, для $p = 59$ и $q = 3$ число $p + q = 62$ нельзя представить в виде суммы трёх степеней двойки, поскольку $2^5 + 2^4 + 2^3 = 56 < 62$.

Комментарий. Только показано, что число $p+1$ хорошее — 1 балл.

Если в работе сделано (верное) утверждение о том, что хорошими числами могут являться лишь 2 и $p+1$, но доказательство этого факта отсутствует или неверно — 1 балл (может суммироваться с предыдущим).

9.9. В окружности ω с центром в точке O провели непересекающиеся хорды AB и CD так, что $\angle AOB = \angle COD = 120^\circ$. Касательная к ω в точке A пересекает луч CD в точке X, а касательная к ω в точке B пересекает луч DC в точке Y. Прямая ℓ проходит через центры окружностей, описанных около треугольников DOX и COY. Докажите, что ℓ касается ω. (*А. Кузнецов*)

Первое решение. Обозначим через Z точку пересечения лучей XA и YB (см. рис. 1). Прямые ZA и ZB касаются окружности ω, поэтому $\angle OAZ = \angle OBZ = 90^\circ$. Тогда $\angle AZB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle AOB = 60^\circ$. Поскольку окружность ω касается сторон угла XZY, её центр O лежит на биссектрисе этого угла, то есть $\angle XZO = 30^\circ = \angle OZY$.

Из равнобедренного треугольника COD получаем $\angle OCD = \angle ODC = 30^\circ$. Тогда $\angle OZX + \angle ODX = 30^\circ + 180^\circ - \angle ODC = 180^\circ$, поэтому четырёхугольник $XDOZ$ вписан. Аналогично, вписан и четырёхугольник $YCOZ$. Таким образом, OZ — общая хорда окружностей, описанных около треугольников DOX и COY, поэтому ℓ — серединный перпендикуляр к отрезку OZ.

Пусть M — середина OZ. Прямая ℓ проходит через M и перпендикулярна OM; поэтому для завершения решения достаточно показать, что точка M лежит на ω. В прямоугольном треугольнике AZO имеем $\angle AZO = 30^\circ$, поэтому $AO = \frac{1}{2}OZ = OM$, откуда и следует требуемое.

Второе решение. Обозначим через T середину меньшей дуги AB окружности ω (см. рис. 2). Тогда $\angle AOT = 60^\circ$ и $OA = OT$. В равнобедренном треугольнике COD имеем $\angle COD = 120^\circ$, откуда $\angle ODC = \angle OCD = 30^\circ$ и, следовательно, $\angle ODX = \angle OCY = 150^\circ$.

Пусть O_1 — центр окружности, описанной около треугольника DOX. Тогда $\angle OO_1X = 2(180^\circ - \angle ODX) = 60^\circ$. Зна-

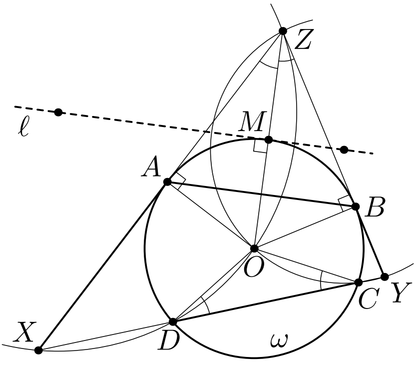

Рис. 1

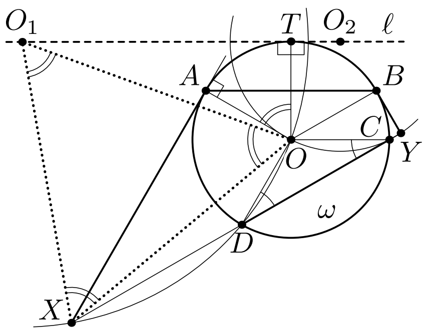

Рис. 2

чит, треугольник OO_1X равносторонний, поэтому $\angle XOO_1 = 60^\circ = \angle AOT$. Следовательно, $\angle TOO_1 = \angle AOX$. Кроме того, $OT = OA$ и $OO_1 = OX$, а значит, треугольники TOO_1 и AOX равны. Отсюда $\angle OTO_1 = \angle OAX = 90^\circ$, то есть точка O_1 лежит на касательной к ω в точке T. Аналогично, центр O_2 окружности, описанной около $\triangle COY$, также лежит на этой касательной; значит, прямая ℓ совпадает с этой касательной.

Замечание. Последний аргумент можно оформить по-другому. Поскольку треугольники AOT и XOO_1 равносторонние, при повороте с центром в точке O на 60° прямая AX переходит в прямую TO_1, а окружность ω переходит в себя. Так как прямая AX касается ω, то и прямая TO_1 также касается ω.

9.10. В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

(*С. Берлов, Н. Власова*)

Ответ. 198.

Решение. Переведём задачу на язык графов, сопоставляя ребёнку вершину, а дружбе — ребро. Тогда нам известно, что в данном графе на 100 вершинах при удалении любой вершины оставшиеся можно разбить на 33 тройки так, что в каждой тройке вершины попарно соединены. Требуется же найти минимальное возможное число рёбер в таком графе.

Для начала построим пример ровно с 198 рёбрами. Разобьём 99 вершин, кроме вершины A, на 33 группы по 3 вершины. Соединим попарно вершины в каждой тройке; наконец, соединим A со всеми другими вершинами. Тогда условия задачи выполнены: при удалении A разбиение на тройки уже приведено, а при удалении любой другой вершины B в этом же разбиении достаточно заменить B на A. При этом в описанном графе всего $33 \cdot 3 + 99 = 198$ рёбер.

Осталось доказать, что это количество — наименьшее. Назовём граф на $3k+1$ вершинах *хорошим*, если при удалении любой вершины остальные $3k$ вершин разбиваются на k троек попарно соединённых. Докажем индукцией по k, что в хорошем графе на $3k+1$ вершинах хотя бы $6k$ рёбер; при $k=33$ получим требуемую оценку. База при $k=1$ несложна: так как при удалении любой вершины три остальных попарно соединены, любые две вершины должны быть соединены, то есть число рёбер равно $C_4^2 = 6$.

Докажем переход индукции. Если из каждой вершины выходит хотя бы по 4 ребра, общее количество рёбер не меньше, чем $(3k+1)\cdot 4/2 = 2(3k+1)$, что даже больше, чем требуемое $6k$. В противном случае найдётся вершина A, соединённая не более, чем с тремя другими. Если удалить любую вершину, кроме A, то A попадёт в какую-то тройку, а значит, она соединена хотя бы с двумя вершинами. Если удалить одну из этих вершин, у A останется не менее двух смежных, то есть было их не меньше трёх. Итак, A соединена ровно с тремя вершинами B, C и D. Тогда при удалении, скажем, B вершины A, C и D образуют тройку, то есть C и D соединены; аналогично получаем, что B, C и D попарно соединены.

Выбросим теперь из нашего графа вершины A, B, C и D, взамен добавив одну вершину X, соединённую со всеми, с кем была соединена хотя бы одна из вершин B, C и D. Заметим, что при этом количество рёбер уменьшилось хотя бы на 6 (т. е. на количество рёбер между A, B, C и D). Покажем, что полученный *новый граф* хороший; отсюда будет следовать переход индукции, ибо тогда в новом графе будет не менее $6(k-1)$ рёбер, а значит, в исходном — не менее $6(k-1)+6=6k$ рёбер.

Пусть из нового графа удалена некоторая вершина $Y \neq X$. Если её удалить из исходного графа, остальные вершины разобьются на тройки; пусть при этом вершина A окажется, для определённости, в тройке с B и C, а вершина D — в другой тройке. Тогда можно разбить новый граф так же, поместив вершину X в ту тройку, где была вершина D. Наконец, если удалить из нового графа вершину X, можно проделать ту же операцию, считая, что из исходного графа удалена вершина D (тогда A, B и C автоматически окажутся в одной тройке). Таким образом, переход индукции доказан.

Замечание. Приведённый пример — не единственный. Рассуждение из второй части решения по сути показывает, что много различных оптимальных примеров можно построить следующим индуктивным образом. При $k = 1$ возьмём 4 вершины и соединим все пары рёбрами. При переходе от k к $k + 1$ добавим три вершины B, C, D, соединим их попарно друг с другом, а также соединим их всех с какой-то уже имеющейся вершиной A.

В таком примере всегда будет $6k$ рёбер, и он будет удовлетворять условию задачи.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Только приведён пример с 198 парами дружащих — 1 балл.

Примеры с бóльшим количеством пар дружащих не оцениваются.

Только доказано, что количество пар дружащих не меньше 198 — 6 баллов.

10 класс

10.6. Петя выбрал натуральное число n и выписал на доску следующие n дробей:

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \ldots, \frac{n-1}{n-(n-1)}.$$

Пусть число n делится на натуральное число d. Докажите, что среди выписанных дробей найдётся дробь, равная числу $d-1$.

(*Б. Обухов*)

Решение. Пусть $n = kd$. Тогда на доске присутствует дробь

$$\frac{n-k}{k} = \frac{kd-k}{k} = d-1,$$

что и требовалось.

10.7. Из четырёх одинаковых треугольников сложен выпуклый четырёхугольник. Верно ли, что у этого четырёхугольника обязательно есть параллельные стороны? (*Методкомиссия*)

Ответ. Неверно.

Решение. Приведем один из возможных примеров. Из двух равных равнобедренных (но не равносторонних) треугольников составим *дельтоид*, приложив их друг к другу равными сторонами, как показано на рис. 3. Каждый из этих двух треугольников разобьем высотой на два равных треугольника. В результате дельтоид окажется составленным из четырех равных прямоугольных треугольников.

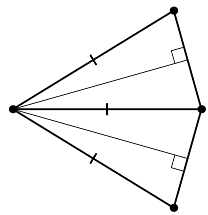

Рис. 3

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Предъявлен любой верный пример, существование которого очевидно из конструкции — 7 баллов.

10.8. Дана клетчатая доска 1000×1000. Фигура *гепард* из произвольной клетки x бьёт все клетки квадрата 19×19 с центральной клеткой x, за исключением клеток, находящихся с x в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске?

(*И. Богданов*)

Ответ. 100 000.

Решение. Разобьём доску на 100^2 квадратов 10×10. Покажем, что в каждом квадрате может стоять не более 10 гепардов, не бьющих друг друга — отсюда будет следовать, что общее число гепардов не может превосходить $100^2 \cdot 10 = 100\,000$.

Рассмотрим произвольный квадрат Q размера 10×10 и произвольного гепарда g в нём. Гепард g бьёт все клетки квадрата, кроме клеток, лежащих с ним в одной строке или в одном столбце. Если один из остальных гепардов g' в квадрате Q стоит в одной строке с g, а ещё один, g'', — в одном столбце с g, то g' и g'' стоят в разных строках и столбцах и, следовательно, бьют друг друга; это невозможно. В противном случае, без ограничения общности, все гепарды в квадрате Q стоят в одной строке с g, то есть их не больше 10.

Таким образом, мы доказали, что общее число гепардов не может превосходить $100\,000$; осталось привести пример, когда эта оценка достигается. Пронумеруем столбцы доски подряд числами $1, 2, \ldots, 1000$. Расставим гепардов на все клетки столбцов, номера которых делятся на 10. Этих гепардов будет $1000 \cdot 100 = 100\,000$, и они не будут бить друг друга.

Комментарий. Приведён лишь пример расстановки $100\,000$ гепардов, не бьющих друг друга — 2 балла.

Примеры с меньшим числом гепардов *не оцениваются.*

Доказано только, что количество гепардов не может превосходить $100\,000$ — 5 баллов.

Если эта оценка лишь сведена к доказательству того, что в любом квадрате 10×10 не более 10 гепардов — за эту часть решения ставится 2 балла вместо 5.

10.9. Докажите, что найдётся такое натуральное число $n > 10^{2018}$, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

(*Р. Салимов*)

Решение. При $n > 1$ обозначим через $S(n)$ сумму всех простых чисел, меньших n. Заметим, что

$$S(n) < 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} < n(n-1). \qquad (*)$$

Рассмотрим два последовательных простых числа $q > p > 10^{2018}$. Предположим, что $S(p)$ не взаимно просто с p, а $S(q)$ не взаимно просто с q. Тогда $S(p)$ делится на p, а $S(q)$ делится на q. Пусть $S(p) = pk$; из неравенства $(*)$ вытекает, что $k < p-1$. Так как $S(q) = S(p) + p = p(k+1)$, и $S(q)$ делится на q, то $k+1 \geqslant q$; однако $k < p-1 < q-1$. Полученное противоречие показывает, что одно из чисел p и q подходит.

Комментарий. Замечено только, что (в предположении противного) для любого простого $p > 10^{2018}$ число $S(p)$ делится на p — 0 баллов.

В предположении противного доказано, что для любых двух последовательных простых чисел $q > p > 10^{2018}$ число $S(q)$ делится как на p, так и на q — 2 балла.

10.10. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle C = 30^\circ$. На его сторонах AB, BC и AC выбраны точки D, E и F соответственно так, что $\angle BFD = \angle BFE = 60^\circ$. Периметр треугольника ABC равен p, а периметр треугольника DEF равен p_1. Докажите, что $p \leqslant 2p_1$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть $\angle AFD = \alpha$. Поскольку угол BDF внешний для треугольника ADF, то $\angle BDF = \angle DAF + \angle AFD = 30^\circ + \alpha$. Также угол BFA внешний для треугольника BFC, поэтому $60^\circ + \alpha = \angle BFA = \angle FBE + \angle FCB$. Следовательно, $\angle FBE = 30^\circ + \alpha = \angle FDB$ (см. рис. 4). Тогда, так как $\angle BFD = \angle BFE = 60^\circ$, треугольники BDF и EBF подобны. Значит, $\frac{BF}{FE} = \frac{DF}{BF}$, или $BF^2 = FD \cdot FE$. Отсюда следует, что $DF + EF \geqslant 2\sqrt{DF \cdot EF} = 2BF$.

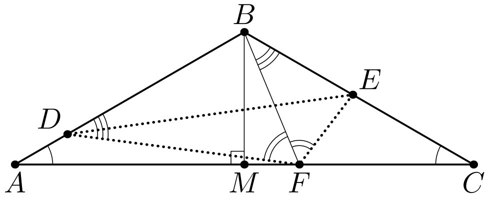

Рис. 4

По теореме косинусов для треугольника DEF имеем

$$DE = \sqrt{DF^2 + EF^2 + DF \cdot EF} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{2DF \cdot EF + DF \cdot EF} = BF\sqrt{3}.$$

Следовательно, $p_1 = DF + EF + DE \geqslant (2 + \sqrt{3}) \cdot BF$.

Пусть BM — высота равнобедренного треугольника ABC. Тогда легко видеть, что $p = (AB+BC)+AC = 4BM+2\sqrt{3}\,BM =$

$= 2(2+\sqrt{3})BM$. Осталось заметить, что $BF \geqslant BM$, поэтому $2p_1 \geqslant 2(2+\sqrt{3})BF \geqslant 2(2+\sqrt{3})BM = p$.

Комментарий. Доказано только, что $DF+EF \geqslant 2BF$ (или $DF+EF \geqslant 2BM$) — 3 балла.

Доказано только, что $DE \geqslant BF\sqrt{3}$ (или $DE \geqslant BM\sqrt{3}$) — 3 балла.

Если эти неравенства выписаны, но не доказаны (или доказаны неверно), баллы не начисляются.

Замечено только, что $p = 2(2+\sqrt{3})BM$ — 0 баллов.

11 класс

11.6. Петя выбрал натуральное число n и выписал на доску следующие n дробей:

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \ldots, \frac{n-1}{n-(n-1)}.$$

Пусть число n делится на натуральное число d. Докажите, что среди выписанных дробей найдётся дробь, равная числу $d-1$.

(*Б. Обухов*)

Решение. Пусть $n = kd$. Тогда на доске присутствует дробь

$$\frac{n-k}{k} = \frac{kd-k}{k} = d-1,$$

что и требовалось.

11.7. Функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, при всех действительных x и y удовлетворяет условию

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно чётная? (*О. Подлипский*)

Ответ. Верно.

Решение. Подставим в данное равенство $-y$ вместо y. Получим

$$f(x) + f(-y) = 2f\left(\frac{x-y}{2}\right) f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Итак, $f(x) + f(y) = f(x) + f(-y)$, откуда для всех действительных y получим $f(y) = f(-y)$. Это и означает, что функция $f(x)$ чётная.

Замечание. Существуют непостоянные функции, удовлетворяющие условию — например, $f(x) = \cos x$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования (или с неверным обоснованием) — 0 баллов.

Показано, что $f(0) = 1$ (в предположении, что f не является тождественным нулём) — 0 баллов.

11.8. Докажите, что найдётся такое натуральное число $n > 10^{2018}$, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

(*Р. Салимов*)

Решение. При $n > 1$ обозначим через $S(n)$ сумму всех простых чисел, меньших n. Заметим, что

$$S(n) < 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} < n(n-1). \qquad (*)$$

Рассмотрим два последовательных простых числа $q > p > 10^{2018}$. Предположим, что $S(p)$ не взаимно просто с p, а $S(q)$ не взаимно просто с q. Тогда $S(p)$ делится на p, а $S(q)$ делится на q. Пусть $S(p) = pk$; из неравенства $(*)$ вытекает, что $k < p-1$. Так как $S(q) = S(p) + p = p(k+1)$, и $S(q)$ делится на q, то $k+1 \geqslant q$; однако $k < p-1 < q-1$. Полученное противоречие показывает, что одно из чисел p и q подходит.

Комментарий. Замечено только, что (в предположении противного) для любого простого $p > 10^{2018}$ число $S(p)$ делится на p — 0 баллов.

В предположении противного доказано, что для любых двух последовательных простых чисел $q > p > 10^{2018}$ число $S(q)$ делится как на p, так и на q — 2 балла.

11.9. В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

(*С. Берлов, Н. Власова*)

Ответ. 198.

Решение. Переведём задачу на язык графов, сопоставляя ребёнку вершину, а дружбе — ребро. Тогда нам известно, что в данном графе на 100 вершинах при удалении любой вершины оставшиеся можно разбить на 33 тройки так, что в каждой тройке вершины попарно соединены. Требуется же найти минимальное возможное число рёбер в таком графе.

Для начала построим пример ровно с 198 рёбрами. Разобьём 99 вершин, кроме вершины A, на 33 группы по 3 вершины. Соединим попарно вершины в каждой тройке; наконец, соединим A со всеми другими вершинами. Тогда условия задачи выполнены: при удалении A разбиение на тройки уже приведено, а при удалении любой другой вершины B в этом же разбиении достаточно заменить B на A. При этом в описанном графе всего $33 \cdot 3 + 99 = 198$ рёбер.

Осталось доказать, что это количество — наименьшее. Назовём граф на $3k+1$ вершинах *хорошим*, если при удалении любой вершины остальные $3k$ вершин разбиваются на k троек попарно соединённых. Докажем индукцией по k, что в хорошем графе на $3k+1$ вершинах хотя бы $6k$ рёбер; при $k=33$ получим требуемую оценку. База при $k=1$ несложна: так как при удалении любой вершины три остальных попарно соединены, любые две вершины должны быть соединены, то есть число рёбер равно $C_4^2=6$.

Докажем переход индукции. Если из каждой вершины выходит хотя бы по 4 ребра, общее количество рёбер не меньше, чем $(3k+1)\cdot 4/2=2(3k+1)$, что даже больше, чем требуемое $6k$. В противном случае найдётся вершина A, соединённая не более, чем с тремя другими. Если удалить любую вершину, кроме A, то A попадёт в какую-то тройку, а значит, она соединена хотя бы с двумя вершинами. Если удалить одну из этих вершин, у A останется не менее двух смежных, то есть было их не меньше трёх. Итак, A соединена ровно с тремя вершинами B, C и D. Тогда при удалении, скажем, B вершины A, C и D образуют тройку, то есть C и D соединены; аналогично получаем, что B, C и D попарно соединены.

Выбросим теперь из нашего графа вершины A, B, C и D, взамен добавив одну вершину X, соединённую со всеми, с кем была соединена хотя бы одна из вершин B, C и D. Заметим, что при этом количество рёбер уменьшилось хотя бы на 6 (т. е. на количество рёбер между A, B, C и D). Покажем, что полученный *новый граф* хороший; отсюда будет следовать переход индукции, ибо тогда в новом графе будет не менее $6(k-1)$ рёбер, а значит, в исходном — не менее $6(k-1)+6=6k$ рёбер.

Пусть из нового графа удалена некоторая вершина $Y\neq X$. Если её удалить из исходного графа, остальные вершины разобьются на тройки; пусть при этом вершина A окажется, для определённости, в тройке с B и C, а вершина D — в другой тройке. Тогда можно разбить новый граф так же, поместив вершину X в ту тройку, где была вершина D. Наконец, если удалить из нового графа вершину X, можно проделать ту же операцию, считая, что из исходного графа удалена вершина D (тогда A, B

и C автоматически окажутся в одной тройке). Таким образом, переход индукции доказан.

Замечание. Приведённый пример — не единственный. Рассуждение из второй части решения по сути показывает, что много различных оптимальных примеров можно построить следующим индуктивным образом. При $k = 1$ возьмём 4 вершины и соединим все пары рёбрами. При переходе от k к $k+1$ добавим три вершины B, C, D, соединим их попарно друг с другом, а также соединим их всех с какой-то уже имеющейся вершиной A.

В таком примере всегда будет $6k$ рёбер, и он будет удовлетворять условию задачи.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Только приведён пример с 198 парами дружащих — 1 балл.

Примеры с бо́льшим количеством пар дружащих не оцениваются.

Только доказано, что количество пар дружащих не меньше 198 — 6 баллов.

11.10. На сфере ω_1 отмечена фиксированная точка A, а на сфере ω_2 — фиксированная точка B. На сфере ω_1 выбирается переменная точка X, а на сфере ω_2 — переменная точка Y так, что $AX \parallel BY$. Докажите, что середины всех построенных таким образом отрезков XY лежат на одной сфере. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры сфер ω_1 и ω_2 соответственно. Отметим (фиксированные) середины S и K отрезков O_1O_2 и AB соответственно, а также (переменные) середины L, M и N отрезков BY, XY и AX соответственно (см. рис. 5). Так как отрезки AX и BY параллельны, отрезок KM также им параллелен. Как известно, четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм, поэтому отрезки KM и LN имеют общую середину T.

Проведём плоскость α через T перпендикулярно AX; так как $KM \parallel AX$, все точки этой плоскости равноудалены от точек K и M. Так как T — середина LN, точки L и N равноудалены от α и лежат по разные стороны от неё (либо обе лежат в α). Так как отрезки O_1N и O_2L перпендикулярны AX, они параллельны α; тогда точки O_1 и O_2 также равноудалены от α, поэтому середина S отрезка O_1O_2 лежит в α. Итак, $SK = SM$.

Таким образом, если точки S и K не совпадают, середина

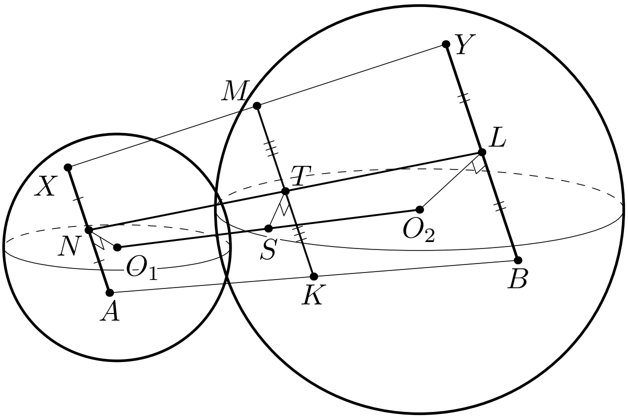

Рис. 5

M отрезка XY лежит на сфере с центром в точке S и радиусом, равным длине отрезка SK. Если же $S = K$, то $S = M$, и середины всех отрезков XY совпадают. В этом случае условию удовлетворяет любая сфера, проходящая через точку S.

Замечание. Равенство $SK = SM$ можно установить и по-другому. При отражении относительно прямой, параллельной AX и BY, векторы $\overrightarrow{O_1A}$ и $\overrightarrow{O_2B}$ переходят в векторы, равные $\overrightarrow{XO_1}$ и $\overrightarrow{YO_2}$ соответственно. Значит, при таком отражении вектор $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_2B})$ переходит в вектор, равный $\frac{1}{2}\,(\overrightarrow{XO_1} + \overrightarrow{YO_2}) = \overrightarrow{MS}$. Отсюда и следует, что $SK = MS$.

Комментарий. Верно указаны центр и радиус искомой сферы — 1 балл.

Если во в целом верном решении не разбирается случай, когда искомая сфера вырождается в точку (в приведённом решении это происходит, если $S = K$) — баллы не снимаются.