11.1. Три муфты

Возможное решение

Пусть в результате удара через стержень передаётся импульс p: $p = \int F(t)dt$, где F – сила упругости.

Запишем изменение импульса для муфт A и C:

$$m\upsilon - p\sin\alpha = 3m\upsilon_{AC}.$$

Тогда изменение импульса для муфты B равно

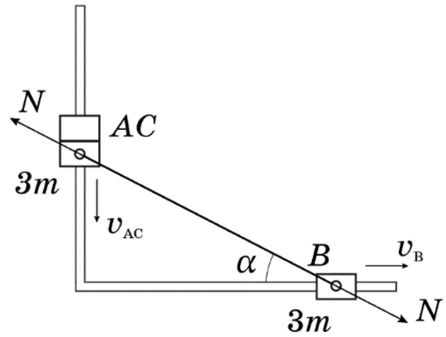
$$p\cos\alpha = 3m\upsilon_B.$$

Из кинематической связи следует: $\upsilon_{AC}\mathrm{tg}\alpha = \upsilon_B$.

Решая полученные уравнения найдём:

$$\upsilon_{AC} = \upsilon\frac{\cos^2\alpha}{3};$$

$$\upsilon_B = \upsilon\frac{\sin(2\alpha)}{6}.$$



11.2. Отрыв цилиндра

Возможное решение

При отсутствии трения натяжение вдоль ленты одинаково по величине и $T = F$ для любого участка ленты.

Если сила давления на ленту со стороны шайбы $\vec{N}$, а $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ натяжения ленты справа и слева от обхватывающего шайбу участка, то $\vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$. При пренебрежимо малой массе этого участка сумма векторов сил, приложенных к нему равна нулю.

В момент отрыва шайба от ленты $\vec{N} = 0$, а $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$. Так как натяжение направлено вдоль ленты, то отрыв цилиндра от ленты происходит в момент, когда вся лента становится горизонтальной.

При переходе в горизонтальное положение свободный конец ленты смещается по горизонтали на $x = R(1-\cos\alpha)$ и работа силы F, приложенной к этому концу, $A = Fx = FR(1-\cos\alpha)$.

Эта работа идёт на приращение механической энергии цилиндра:

$$A = FR(1-\cos\alpha) = m\upsilon^2/2 + mgR\sin\alpha\text{, откуда } m\upsilon^2/2 = R\left[F(1-\cos\alpha) - mg\sin\alpha\right],$$

$$\text{или } \upsilon = \sqrt{2R\left[F(1-\cos\alpha)/m - g\sin\alpha\right]}.$$

Ответ имеет смысл если подкоренное выражение положительно.

11.3. Дифференциальный термометр

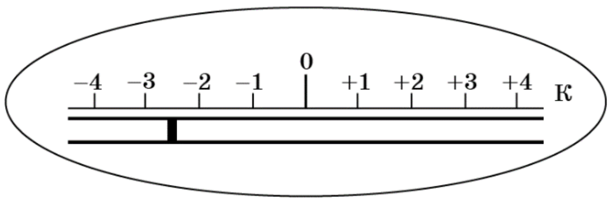
Возможное решение

Для начального состояния газов в сосудах можно записать уравнение Менделеева-Клапейрона: $\frac{p_0(V+LS/2)}{T_0}=\nu R$, здесь p_0 – давление газа вначале, а $V_0=V+LS/2$.

Если температура в левом сосуде повысится на ΔT_1, а в правом понизится на ΔT_2 и поршень сместится влево на ΔL, то новые уравнения состояния примут вид: $\frac{p(V_0+\Delta LS)}{T_0+\Delta T_1}=\nu R$ и $\frac{p(V_0-\Delta LS)}{T_0-\Delta T_2}=\nu R$. Приравнивая левые части с учетом $\Delta LS << V$, получим: $\Delta L=\frac{V_0(\Delta T_1+\Delta T_2)}{2ST_0}$, откуда, учитывая, что $\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2$, окончательно $\Delta L=\frac{V_0\Delta T}{2ST_0}$. Из выведенного уравнения следует, что при малых изменениях температур сосудов малые смещения поршня связаны линейно с разностью температур ΔT.

Заметим, что 4-м делениям шкалы термометра соответствует 8 см. Следовательно, цена деления шкалы $\Delta T^{дел}=\frac{2ST_0\Delta L_1}{V+LS/2}=\frac{2\cdot 10^{-4}\cdot 300\cdot 0{,}02}{10^{-3}+1{,}5\cdot 10^{-4}}\approx 1{,}0$ К.

Таким образом, шкала термометра, показывающего разность температур T_1–T_2 должна выглядеть так:

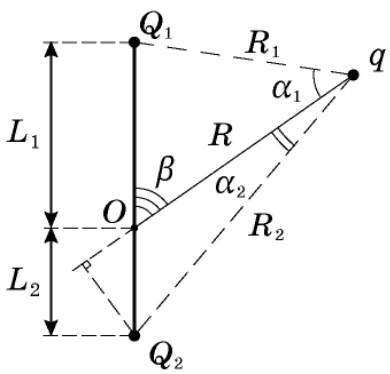


11.4. И так можно измерять

Возможное решение

Условие равновесия заряда на конце нити: равенство нулю суммы кулоновских сил со стороны Q_1 и Q_2 и натяжения нити, направленного к точке O.

Исключим натяжение, рассмотрев составляющие кулоновских сил, поперечные нити. Из условия равновесия следует



$$\frac{Q_1\sin\alpha_1}{R_1^2}=\frac{Q_2\sin\alpha_2}{R_2^2}, \qquad (1)$$

где R_1 и R_2 расстояния от конца нити до зарядов, а α_1 и α_2 углы, образуемые кулоновскими силами с нитью.

Поскольку $R_1\sin\alpha_1=L_1\sin\beta,\ R_2\sin\alpha_2=L_2\sin\beta$ (2)

и $\quad \dfrac{Q_1 L_1}{R_1^3} = \dfrac{Q_2 L_2}{R_2^3}$, $\quad$ то $\quad Q_1 = Q_2\left(\dfrac{L_2}{L_1}\right)\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^3$ (3)

Из теоремы косинусов находим $R_1^2 = R^2 + L_1^2 + 2RL_1\cos\beta,\ R_2^2 + L_2^2 + 2RL_2\cos\beta$, (4)

Откуда находим $Q_1 = Q_2\left(\dfrac{L_2}{L_1}\right)\left(\dfrac{R^2 + L_1^2 - 2RL_1\cos\beta}{R^2 + L_2^2 + 2RL_2\cos\beta}\right)^{3/2}$ (5)

При нити, отклонённой от прямой, соединяющей заряды Q_1 и Q_2, равновесие устойчиво так как с изменением β возникнет возвращающая сила. При β = 0 и 180^o равновесие будет при любом Q_1, но оно не обязательно устойчиво.

Минимальный измеримый заряд Q_{min} достигается при стремлении β к 0, а максимальный Q_{max} – к 180^o.

(6)

При указанных в условии значениях $L_1 = 2L_2,\ R = 3L_2$ получим, что при $Q_{min} = \dfrac{1}{128}Q_2$ и $Q_{max} \geq \dfrac{10^3}{128}Q_2 = \dfrac{125}{16}Q_2$. (7)

Более компактная запись решения получается, если задачу решать в векторном виде.

11.5. Составной конденсатор

Возможное решение

1) Три пластины представляют собой два последовательно соединённых конденсатора емкостью $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d},\ C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{2d}$. Заряд на обоих конденсаторах равен q. Ёмкость эквивалентного конденсатора $C_{Экв} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{3d}$.

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{q^2}{2C_1} + \frac{q^2}{2C_2} = \frac{LI_{max}^2}{2}. \qquad (1)$$

Из записанных уравнений найдём $\quad I_{max} = q\sqrt{\dfrac{3d}{\varepsilon_0 SL}}.$

2) Верхний конденсатор можно представить как два, соединённых параллельно: $C_{11} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S/2}{d},\ C_{12} = \dfrac{\varepsilon_0 S/2}{2d}$. Их суммарная емкость $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{2d}(1+\varepsilon)$.

В рассматриваемом случае закон сохранения выглядит так же как (1). После подстановки в него выражений для C_{11} и C_{12}, получим:

$$I_{max} = q\sqrt{\frac{2d}{\varepsilon_0 SL}\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon}}.$$