Математика
ГБОУ ДО РК «МАН «Искатель»
295011, Республика Крым, г. Симферополь, ул. Гоголя, д. 26, +7(0652)273213, 027@crimeaedu.ru, maniskatel@crimeaedu.ru

Прямоугольный треугольник и свойства его двумерных вариаций

Балко Елена Сергеевна
9-В
Республика Крым, г. Симферополь, ул. Семашко, д. 3, кв. 19, +7(978)0772651, emnorets@yandex.ru
Третьяков Дмитрий Вадимович, доцент ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского»

Целью исследовательской работы является изучение двумерных вариаций расположения прямоугольного треугольника на координатной оси и выявление характеризующих его величин.

Объектом исследования выступает двумерное расположение вариаций прямоугольного треугольника на координатной оси.

Предметом исследования являются способы нахождения величин, характеризующих прямоугольный треугольник и его вариации: координат вершин треугольника, длин его сторон, площади треугольника, расположенного на координатной оси и др.

Поставленная цель предопределила решение ряда задач:

- изучить варианты расположения треугольника на координатной оси;
- рассмотреть способы нахождения величин, характеризующих треугольник и его вариаций, расположенных на координатной оси.
- изучить основные положения метода координат на плоскости.

Достижение поставленных задач стало возможным при условии использования следующих методов исследования:

- изучение теоретического материала по теме исследования;
- математическое моделирование;
- графический метод.

Гипотеза заключается в том, что компоненты треугольников из множества вариаций и площади треугольников обладают монотонными свойствами.

Прикладная ценность проведенного исследования заключается в использовании полученных результатов для технических расчетов, например, при мостостроении, прокладывании маршрутов кораблей и самолетов.

Постановка задания. Пусть задан ΔABC. Введем систему координат, считая точку С началом координат и пусть сторона АС лежит на положительной оси Ох. Пусть точка В лежит на радиусе полуокружности с центром в точке С радиуса АС (рис. 1). Теперь будем двигать вершину А по полуокружности радиуса b с центром в начале координат. Полученные треугольники за исключением вырожденных случаев (когда сторона АС находится на оси Ох) будем называть вариациями треугольника АВС.

Таким образом, при любом расположении треугольника на оси координат возможно нахождение компонентов треугольника и его площади. Далее рассмотрим вариации расположения треугольника и попытаемся подтвердить или опровергнуть гипотезу.

Координаты точек A_1 и A_2 в I и во II четвертях координатной оси.

Таким образом, если координаты точек A_1 и A_2 находятся в I и во II четвертях координатной оси, для нахождения их координат можно использовать равенства

$A_1 = (\frac{b}{\sqrt{1+k^2}}; \frac{kb}{\sqrt{1+k^2}})$ и $A_2 = (-\frac{b}{\sqrt{1+k^2}}; \frac{kb}{\sqrt{1+k^2}})$

Длины отрезков A_1B, A_1C в I четверти и A_2B, A_2C во II четверти координатной оси

Найдем длины отрезков A_1B и A_1C, находящихся в I четверти и A_2B и A_2C, расположенных во II четверти координатной оси. Рассчитано, что для нахождения длин отрезков A_1B и A_1C, находящихся в I четверти и длин отрезков A_2B и A_2C, расположенных во II четверти координатной оси были получены следующие формулы:

$|A_1B| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\frac{ab}{\sqrt{1+k^2}}}$ и $|A_2B| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2\frac{ab}{\sqrt{1+k^2}}}$

Т.е. при известных координатах концов отрезка, расположенного на оси координат, мы можем найти длину этого отрезка, используя предложенные уравнения.

Площади треугольников $CA_{(k)}B$, k= 1, 2 (положение точки A определяется в зависимости от коэффициента k).

При расположении треугольника CAB на координатной оси, можно определить его площадь, используя определитель второго порядка.

Площадь исходного прямоугольного треугольника CAB равна $\frac{ab}{2}$, тогда площадь S(k) можно представить как $\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}} \cdot S_{\Delta ABC}$

Значение k, при котором треугольник в I четверти прямоугольный.

В случае, если прямоугольный треугольник расположен в I четверти координатной оси, можно найти значение коэффициента k.

Точка A_1 при угле B=90 имеет координаты $(a, \frac{kb}{\sqrt{1+k^2}})$. Проведя расчеты получаем $k = \sqrt{(\frac{b}{a} - 1)(\frac{b}{a} + 1)}$

Монотонность функции площади

У треугольника, расположенного на координатной оси, наблюдается монотонность функции площади.

Зависимость площади S треугольника от угла наклона k опишем формулой $S(k) = \frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{ab}{2}$

Пусть $k_1 > k_2 > 0$

Тогда для того, чтобы узнать, монотонно возрастающая функция или нет, нужно определить знак разности $S(k_1) - S(k_2)$

В ходе проведенных расчетов получаем, что $k_1^2 + k_1^2 k_2^2 > k_2^2 + k_1^2 k_2^2$, так как $k_1 > k_2 > 0$. Тогда и $\sqrt{k_1^2 + k_1^2 k_2^2} - \sqrt{k_2^2 + k_1^2 k_2^2} > 0$

Косинусы углов в I четверти и во II четверти координатной оси

После преобразований мы получаем

I четверть:

$$\cos\alpha = \frac{b - \frac{a}{\sqrt{1+k^2}}}{\sqrt{a^2+b^2-2\frac{ab}{\sqrt{1+k^2}}}}, \cos\beta = \frac{a - \frac{b}{\sqrt{1+k^2}}}{\sqrt{a^2+b^2-2\frac{ab}{\sqrt{1+k^2}}}}, \cos\gamma = \frac{1}{1+k^2}$$

II четверть:

$$\cos\alpha = \frac{b + \frac{a}{\sqrt{1+k^2}}}{\sqrt{a^2+b^2+2\frac{ab}{\sqrt{1+k^2}}}}, \cos\beta = \frac{a + \frac{b}{\sqrt{1+k^2}}}{\sqrt{a^2+b^2+2\frac{ab}{\sqrt{1+k^2}}}}, \cos\gamma = -\frac{1}{1+k^2}$$

Как мы видим, косинусы углов II четверти больше косинусов углов I четверти, следовательно, величина косинусов возрастает.

Выводы. При выполнении данной исследовательской работы была поставлена следующая цель: изучение двумерных вариаций расположения треугольника на координатной оси и выявление характеризующих его величин, которая достигнута полностью.

Задачи, направленные на достижение поставленной цели решены. В процессе работы рассмотрены варианты расположения треугольника на координатной оси и основные положения метода координат на плоскости и способы нахождения величин, характеризующих треугольник и его вариации, расположенные на координатной оси. Гипотеза, сделанная в начале работы, оказалась верной: компоненты треугольников из множества вариаций и площади треугольников действительно обладают монотонными свойствами.

Литература

1. Гельфанд И.М. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Обобщенные функции (Том 5). М.: Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1962. – 656 с.

2. Гельфанд И.М. Метод координат. Библиотека физико-математической школы. Математика (Том 1). – М.: Наука, 1968. – 77 с.

3. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. ОГИЗ, Гос. изд-во техническо-теоретической лит-ры, 1945. – 486 с.

4. Зайцев И.Л. Курс высшей математики для техникумов. Под ред. Г.С. Бараненкова. – М.: Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1958. – 372 с.

5. Метельский Н.В. Математика. Курс средней школы для поступающих в ВУЗы и техникумы. Изд. 2-е стереотип. – Мн.: Вышэйш. школа, 1973. – 688 с.

6. Сканави Н.И. Элементарная математика. М.: Книга по требованию, 1972 – 583 с.

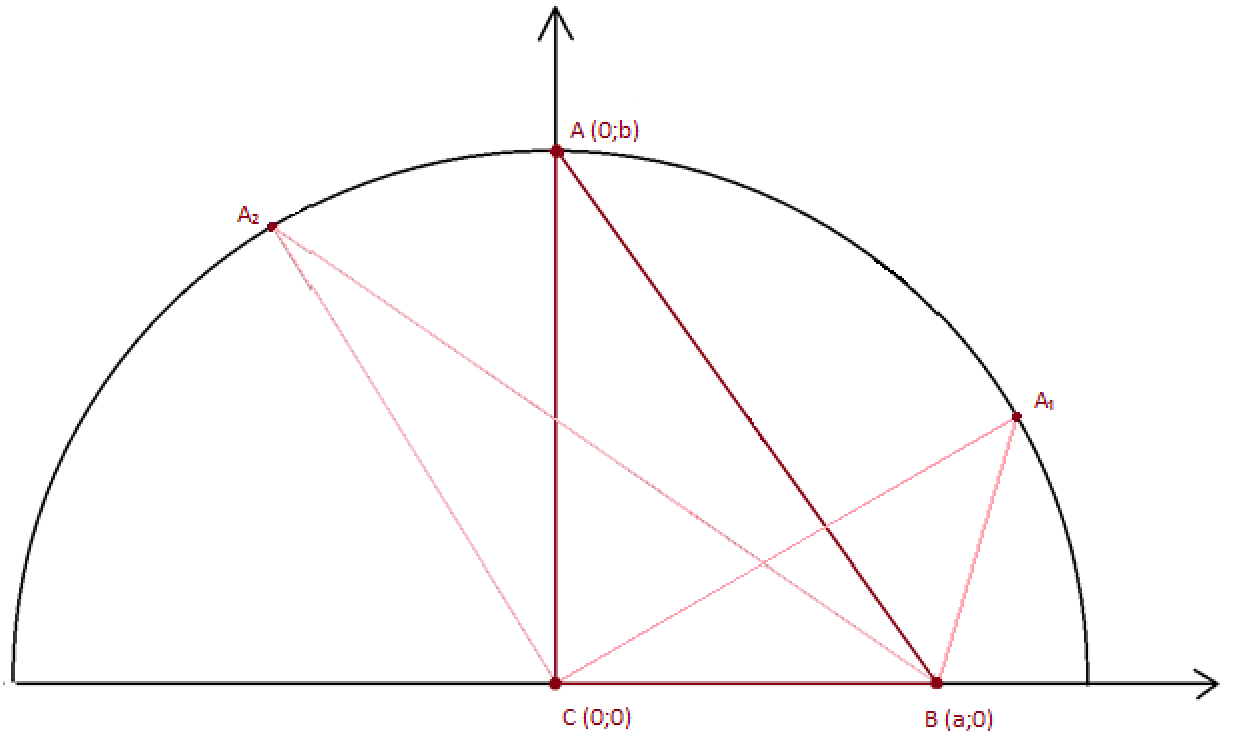

Рис. 1. Расположение треугольника на координатной оси.