

Раздел 1. Принцип математической индукции (10 класс)

1.1. (8 баллов)

Доказать, что $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\dots+\sqrt{6}}}}}$ меньше 3 при любом количестве радикалов.

1.2 (9 баллов)

Доказать, что

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\dots(1-\frac{1}{n^2})=\frac{n+1}{2n}$$

1.3. (10 баллов)

Известно, что $x+\frac{1}{x}$ — целое. Доказать, что для любого n $x^n+\frac{1}{x^n}$ также целое.

1.4 (11 баллов)

Докажите, что $1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$

1.5 (12 баллов)

Докажите, что $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{n^2}<2$ при любом значении n

Раздел 8. Геометрия в пространстве (10 класс)

8.1. (8 баллов)

В цилиндр вписан шар. Найти отношение их:

- а) объемов
- б) площадей поверхности.

8.2 (9 баллов).

Найдите угол и расстояние между прямой, лежащей в плоскости XOZ и задаваемой там уравнением $2x - 3z = 5$, и прямой, заданной уравнением

$$3y + 2z = 7 \text{ в плоскости } YOZ$$

8.3.(10 баллов)

Написать уравнение плоскости, симметричной плоскости $x + 2y + 3z + 1 = 0$ относительно плоскости $x + y + z = 0$.

8.4 (11 баллов)

Через вершину прямого кругового конуса проведено сечение наибольшей площади.

Оказалось, что это сечение по площади в два раза больше осевого сечения конуса. Найти угол в осевом сечении конуса.

8.5 (12 баллов)

Придумать выпуклый многогранник, имеющий столько же граней, ребер и вершин, как и куб, причем в каждой вершине сходятся по три ребра, однако не все его грани — четырехугольники.

Раздел 9. Аналитические методы в геометрии (10 класс)

9.1. (8 баллов)

Найдите угол между прямыми $x = 7-2y$ и $x = 3y-3$.

9.2. (9 баллов)

Найдите расстояние от точки с координатами (3, 7) до прямой $3x + 4y - 15 = 0$

9.3. (10 баллов)

Найдите уравнение окружности, проходящей через точки (0; -10); (0;-4); (1;-3)

9.4. (11 баллов)

Напишите уравнения сторон треугольника с вершиной в точке (2, -5), две из медиан которого задаются уравнениями $4x = -5y$ и $x = 3y$.

9.5. (12 баллов)

На плоскости дано несколько точек с заданными массами. Из каждой точки поочередно проводятся медианы — прямые, соединяющие точку с центром масс оставшегося набора. Докажите, что все медианы пересекутся в одной точке.

Раздел 15. Последовательности и пределы (10 класс)

15.1. (8 баллов)

Последовательность задана выражением $a_n = n^{1/n}$. Найти максимальный член этой последовательности.

15.2. (9 баллов)

Найдите любое n , большее 1, что $2^n > n^{100}$.

15.3. (10 баллов)

Докажите, что числа Фибоначчи удовлетворяют соотношению
 $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$ ($F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$)

15.4. (11 баллов)

Последовательность задана рекуррентно: $a_n = a_{n-1}/a_{n-2}$, $a_1 = 20$, $a_2 = 17$. Найти a_{2018}

15.5 (12 баллов)

Последовательность задается формулой $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+n\sqrt{n+1}}}$. Найти сумму её первых 99 членов.